Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Отборочный этап

Задания, ответы и критерии оценивания по естественным наукам

2018-2019

Отборочный этап

6 класс **2018-2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Делимое в шесть раз больше делителя, а делитель в четыре раза больше частного. Найдите делимое.
Ответ: 144
Решение. Из условия задачи следует, что частное равно 6. Тогда делитель 24, а делимое 144.

2. (*17 баллов*) Хулиган Василий выдрал из книги целую главу, первая страница которой была под номером 231, а номер последней страницы состоял из тех же цифр. Сколько листов выдрал Василий из книги?
Ответ: 41
Решение. Номер последней страницы начинается с цифры 3 и должен быть чётным, значит, последняя страница имеет номер 312. Василий выдрал $312-231+1=82$ страницы или 41 лист.

3. (*17 баллов*) Разделите число 90 на две части так, чтобы 40% одной части были на 15 больше 30% другой части. В ответ запишите большую из частей.
Ответ: 60
Решение. Обозначим одну часть числа x, тогда другая часть составит $90–x$. Получаем уравнение $0{,}4\cdot x=0{,}3\cdot(90-x)+15$, решая его получаем $x=60$, а другая часть числа – 30.

4. (*15 баллов*) Танкер наполняется нефтью со скоростью 3 барреля в минуту. С учётом того, что 1 баррель равен 159 литрам, определите скорость наполнения танкера в м^3/час.

Ответ: $28{,}62\,\dfrac{м^3}{ч}$

Решение. $3\,\dfrac{барреля}{мин}=3\,\dfrac{159\ литров}{\frac{1}{60}\,ч}=3\cdot159\cdot10^{-3}\cdot60\,\dfrac{м^3}{ч}=28{,}62\,\dfrac{м^3}{ч}$

5. (*15 баллов*) Поезд длиной $120\,м$, двигаясь с постоянной скоростью, прошёл мост длиной $240\,м$ за $3\,мин$. Определите скорость поезда.

Ответ: $2\,\frac{м}{с}$

Решение. Скорость поезда: $v=\frac{120+240}{3\cdot 60}=2\,\frac{м}{с}$

6. (*20 баллов*) Из алюминия сделали килограммовую модель кузова спортивного автомобиля в масштабе $1:10$. Какова масса самого кузова, если он также полностью сделан из алюминия?

Ответ: $1000\,кг$

Решение. Все размеры кузова в 10 раз больше по сравнению с моделью. Следовательно, объем кузова больше в $10\cdot 10\cdot 10=1000$ раз. Масса прямо пропорциональна объему, следовательно, масса кузова:

$$m_{кузова}=1000m_{модели}=1000\,кг.$$

Отборочный этап

6 класс **2018-2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Делимое в пять раз больше делителя, а делитель в четыре раза больше частного. Найдите делимое.

Ответ: 100

Решение. Из условия задачи следует, что частное равно 5. Тогда делитель 20, а делимое 100.

2. (*17 баллов*) Хулиган Василий выдрал из книги целую главу, первая страница которой была под номером 241, а номер последней страницы состоял из тех же цифр. Сколько листов выдрал Василий из книги?

Ответ: 86

Решение. Номер последней страницы начинается с цифры 4 и должен быть чётным, значит, последняя страница имеет номер 412. Василий выдрал $412-241+1=172$ страницы или 86 листов.

3. (*17 баллов*) Разделите число 80 на две части так, чтобы 30% одной части были на 10 больше 20% другой части. В ответ запишите меньшую из частей.

Ответ: 28

Решение. Обозначим одну часть числа *x*, тогда другая часть составит 80–*x*. Получаем уравнение $0{,}3\cdot x=0{,}2\cdot(80-x)+10$, решая его получаем *x*=52, а другая часть числа – 28.

4. (*15 баллов*) Танкер наполняется нефтью со скоростью 2 барреля в полминуты. С учётом того, что 1 баррель равен 159 литрам, определите скорость наполнения танкера в $м^3$/час.

Ответ: $38{,}16\,\frac{м^3}{ч}$

Решение. $$2\,\frac{барреля}{\frac{1}{2}\,мин}=2\,\frac{159\ литров}{\frac{1}{120}\,ч}=2\cdot159\cdot10^{-3}\cdot120\,\frac{м^3}{ч}=38{,}16\,\frac{м^3}{ч}.$$

5. (*15 баллов*) Поезд длиной $360\ м$, двигаясь с постоянной скоростью, прошёл мост длиной $240\ м$ за $4\ мин$. Определите скорость поезда.

Ответ: $2{,}5\ \frac{м}{с}$

Решение. Скорость поезда: $v = \frac{360+240}{4\cdot 60} = 2{,}5\ \frac{м}{с}$.

6. (*20 баллов*) Из алюминия сделали двухкилограммовую модель кузова спортивного автомобиля в масштабе $1:8$. Какова масса самого кузова, если он также полностью сделан из алюминия?

Ответ: $1024\ кг$

Решение. Все размеры кузова в 8 раз больше по сравнению с моделью. Следовательно, объем кузова больше в $8\cdot 8\cdot 8 = 512$ раз. Масса прямо пропорциональна объему, следовательно, масса кузова:

$m_{кузова} = 512 m_{модели} = 1024\ кг$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Отборочный этап

7 класс **2018-2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) При ходьбе в гору турист идёт на 2 км/ч медленнее, а с горы на 2 км/ч быстрее, чем при ходьбе по ровной местности. Восхождение на гору занимает у туриста 10 часов, а спуск с этой горы – 6 часов. Какова скорость туриста по ровной местности?

Ответ: 8

Решение. Обозначим x км/ч – скорость туриста по ровной местности. По условию задачи получаем уравнение $10(x-2)=6(x+2)$. Откуда находим x=8.

2. (*17 баллов*) Сумма двух натуральных чисел равна 1244. Эти числа станут равными друг другу, если в конце первого числа приписать цифру 3, а в конце второго числа отбросить цифру 2. Найдите большее число.

Ответ: 1232

Решение. Обозначим x – первое число, а y – второе число. По условию задачи $10x+3=\dfrac{y-2}{10}$. Тогда $y=100x+32$. Учитывая, что $x+y=1244$, получаем $x=12,\ y=1232$.

3. (*16 баллов*) Митя, Антон, Гоша и Борис купили лотерейный билет за 20 рублей. Митя заплатил 24% стоимости билета, Антон – 3 рубля 70 копеек, Гоша – 0,21 стоимости билета, а оставшуюся сумму внёс Борис. Мальчики договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесённому вкладу. На билет выпал выигрыш 1000 рублей. Какая сумма (в рублях) причитается Борису?

Ответ: 365

Решение. Билет стоит 2000 коп. Митя заплатил 480 коп, Антон – 370 коп, Гоша – 420 коп, следовательно, Борис доплатил 730 коп. Так как выигрыш в 50 раз больше стоимости билета, то Борису причитается 365 руб.

4. (*15 баллов*) Во время прогулки пешеход сначала прошел $3\,км$ со скоростью $1{,}5\,м/с$, а затем еще $3600\,м$ со скоростью $3{,}6\,км/ч$. Определите его среднюю скорость за всю прогулку.

Ответ: $\approx 1{,}18\,\frac{м}{с}$

Решение. Время, затраченное на первый участок пути $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{3000}{1{,}5} = 2000\,с$. Время, затраченное на второй участок пути $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{3600}{1} = 3600\,с$. Средняя скорость за всю прогулку: $v_{ср} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{3000+3600}{2000+3600} \approx 1{,}18\,\frac{м}{с}$

5. (*20 баллов*) Часы показывают время четыре часа пятнадцать минут. Определите угол между минутной и часовой стрелкой в этот момент времени.

Ответ: $37{,}5°$

Решение. Пять минут – это $\frac{5}{60}$ от окружности, то есть $30°$. Минутная стрелка показывает пятнадцать минут, то есть $90°$. Часовая стрелка успела за пятнадцать минут пройти четверть расстояния между четырьмя ($120°$) и пятью ($150°$) часами, то есть часовая стрелка показывает $127{,}5°$. Угол между минутной и часовой стрелкой в этот момент времени: $127{,}5° - 90° = 37{,}5°$.

6. (*15 баллов*) Локатор принял отражённый от цели сигнал через $15\,микросекунд$. Определите расстояние до цели, если известно, что скорость распространения сигнала локатора $300\,000\,км/с$. Учтите, что одна микросекунда это одна миллионная часть секунды.

Ответ: $2250\,м$

Решение. За $15\,микросекунд$ сигнал проходит расстояние от локатора до цели и обратно. Следовательно, расстояние до цели:

$$S = v\frac{t}{2} = 3\cdot 10^8 \cdot \frac{15\cdot 10^{-6}}{2} = 2250\,м$$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Отборочный этап

7 класс **2018-2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) При ходьбе в гору турист идёт на 3 км/ч медленнее, а с горы на 3 км/ч быстрее, чем при ходьбе по ровной местности. Восхождение на гору занимает у туриста 8 часов, а спуск с этой горы – 4 часа. Какова скорость туриста по ровной местности?

Ответ: 9

Решение. Обозначим x км/ч – скорость туриста по ровной местности. По условию задачи получаем уравнение $8(x-3)=4(x+3)$. Откуда находим $x=9$.

2. (*17 баллов*) Сумма двух натуральных чисел равна 1558. Эти числа станут равными друг другу, если в конце первого числа приписать цифру 4, а в конце второго числа отбросить цифру 3. Найдите большее число.

Ответ: 1543

Решение. Обозначим x – первое число, а y – второе число. По условию задачи $10x+4=\frac{y-3}{10}$. Тогда $y=100x+43$. Учитывая, что $x+y=1558$, получаем $x=15,\ y=1543$.

3. (*16 баллов*) Митя, Антон, Гоша и Борис купили лотерейный билет за 20 рублей. Митя заплатил 24% стоимости билета, Антон – 3 рубля 70 копеек, Гоша – 0,21 стоимости билета, а оставшуюся сумму внёс Борис. Мальчики договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесённому вкладу. На билет выпал выигрыш 800 рублей. Какая сумма (в рублях) причитается Борису?

Ответ: 292

Решение. Билет стоит 2000 коп. Митя заплатил 480 коп, Антон – 370 коп, Гоша – 420 коп, следовательно, Борис доплатил 730 коп. Так как выигрыш в 40 раз больше стоимости билета, то Борису причитается 292 руб.

4. (*15 баллов*) Во время прогулки пешеход сначала прошел $2{,}8\,км$ со скоростью $1{,}4\,м/с$, а затем ещё пробежал $1800\,м$ со скоростью $7{,}2\,км/ч$. Определите его среднюю скорость за всю прогулку.

Ответ: $\approx 1{,}59\,\frac{м}{с}$

Решение. Время, затраченное на первый участок пути $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{2800}{1{,}4} = 2000\,с$. Время, затраченное на второй участок пути $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{1800}{2} = 900\,с$. Средняя скорость за всю прогулку: $v_{ср} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2800+1800}{2000+900} \approx 1{,}59\,\frac{м}{с}$

5. (*20 баллов*) Часы показывают время пятнадцать минут шестого. Определите угол между минутной и часовой стрелкой в этот момент времени.

Ответ: $67{,}5°$

Решение. Пять минут – это $\frac{5}{60}$ от окружности, то есть $30°$. Минутная стрелка показывает пятнадцать минут, то есть $90°$. Часовая стрелка успела за пятнадцать минут пройти четверть расстояния между пятью ($150°$) и шестью ($180°$) часами, то есть часовая стрелка показывает $157{,}5°$. Угол между минутной и часовой стрелкой в этот момент времени: $157{,}5° - 90° = 67{,}5°$.

6. (*15 баллов*) Локатор принял отражённый от цели сигнал через $6\,микросекунд$. Определите расстояние до цели, если известно, что скорость распространения сигнала локатора $300\,000\,км/с$. Учтите, что одна микросекунда это одна миллионная часть секунды.

Ответ: $900\,м$

Решение. За $6\,микросекунд$ сигнал проходит расстояние от локатора до цели и обратно. Следовательно, расстояние до цели:

$$S = v\frac{t}{2} = 3\cdot 10^8 \cdot \frac{6\cdot 10^{-6}}{2} = 900\,м$$

Отборочный этап

8 класс **2018-2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) Цена входного билета на стадион 400 р. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 25%, а выручка возросла на 12,5%. Сколько стал стоить входной билет после снижения цены?

Ответ: 360

Решение. Пусть до понижения стоимости билета зрителем был 1 человек. Тогда выручка составляла 400 руб. Пусть x руб – новая стоимость билета. Получаем уравнение $x \cdot 1{,}25 = 400 \cdot 1{,}125$. Откуда x=360.

2. (*17 баллов*) Турист проходит из пункта A в пункт B за 1 час 56 мин. Дорога из A в B идёт сначала в гору, потом по ровной местности, затем под гору. Какова протяжённость дороги по ровной местности, если скорость движения туриста под гору 6 км/ч, в гору – 4 км/ч, по ровной местности – 5 км/ч, а всё расстояние между A и B 9 км. При этом расстояние в гору и по ровной местности равны целому числу км.

Ответ: 3

Решение. Пусть x км турист идёт в гору, y км – по ровной местности, тогда 9–x–y км – под гору. Получаем $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{9-x-y}{6}=\frac{29}{15}$. После преобразований $5x+2y=26$. Очевидно, что x должно быть чётное и $x+y \le 9$. Единственное решение x=4, y=3.

3. (*16 баллов*) Шахматист сыграл 40 партий в шахматы и получил 25 очков (за каждую победу – 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков). Найдите разность между количеством его побед и количеством его поражений.

Ответ: 10

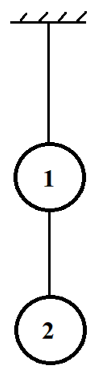
Решение. Пусть у шахматиста было n побед и m поражений. Тогда получаем $n+0{,}5\cdot(40-n-m)=25$. В итоге $n-m=10$.

4. (*20 баллов*) Алюминиевая и медная детали имеют одинаковый объём. Плотность алюминия $\rho_A = 2700\,кг/м^3$, плотность меди $\rho_M = 8900\,кг/м^3$. Найдите массу алюминия, если известно, что массы деталей отличаются на $\Delta m = 60\,г$.

Ответ: $26\,г$

Решение. Объём алюминия: $V = \dfrac{m_A}{\rho_A}$, объём меди: $V = \dfrac{m_M}{\rho_M} = \dfrac{m_A + \Delta m}{\rho_M}$. Получаем: $\dfrac{m_A + \Delta m}{\rho_M} = \dfrac{m_A}{\rho_A}$. Отсюда масса алюминия: $m_A = \dfrac{\Delta m \cdot \rho_A}{\rho_M - \rho_A} = \dfrac{0{,}06 \cdot 2700}{8900 - 2700} \approx 0{,}026\,кг \approx 26\,г$.

5. (*15 баллов*) Найдите отношение m_1/m_2 двух висящих шариков, если известно, что силы натяжения верхней и нижней нитей отличаются в два раза.



Ответ: $\dfrac{m_1}{m_2} = 1$

Решение. Для нижнего шарика: $m_2 g = T_H$. Для верхнего шарика: $m_1 g + T_H = m_1 g + m_2 g = T_B$. При этом, $T_B = 2T_H$. Получаем, что $m_1 g + m_2 g = 2m_2 g$, то есть $\dfrac{m_1}{m_2} = 1$.

6. (*15 баллов*) От однородного прямого стержня отрезали кусок длиной $s = 60\,см$. На сколько в результате переместился центр тяжести стержня?

Ответ: $30\,см$

Решение. У исходного стержня центр тяжести располагался на расстоянии $\dfrac{l}{2}$ от его конца, где l – длина стержня. После того как отрезали кусок стержня, его центр окажется на расстоянии $\dfrac{l - s}{2}$ от другого конца. Следовательно, центр тяжести стержня переместился на $\dfrac{s}{2} = 30\,см$.

Отборочный этап

8 класс **2018-2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) Цена входного билета на стадион 400 р. После повышения входной платы число зрителей уменьшилось на 20%, а выручка возросла на 5%. Сколько стал стоить входной билет после повышения цены?

Ответ: 525

Решение. Пусть до понижения стоимости билета зрителем был 1 человек. Тогда выручка составляла 400 руб. Пусть x руб – новая стоимость билета. Получаем уравнение $x \cdot 0{,}8 = 400 \cdot 1{,}05$. Откуда x=525.

2. (*17 баллов*) Турист проходит из пункта A в пункт B за 2 часа 14 мин. Дорога из A в B идёт сначала в гору, потом по ровной местности, затем под гору. Какова протяжённость дороги в гору, если скорость движения туриста под гору 6 км/ч, в гору – 4 км/ч, по ровной местности – 5 км/ч, а всё расстояние между A и B 10 км. При этом расстояние в гору и по ровной местности равны целому числу км.

Ответ: 6

Решение. Пусть x км турист идёт в гору, y км – по ровной местности, тогда 10–x–y км – под гору. Получаем $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{10 - x - y}{6} = \frac{67}{30}$. После преобразований $5x + 2y = 34$. Очевидно, что x должно быть чётное и $x + y \leq 10$. Единственное решение x=6, y=2.

3. (*16 баллов*) Шахматист сыграл 42 партии в шахматы и получил 30 очков (за каждую победу – 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков). Найдите разность между количеством его побед и количеством его поражений.

Ответ: 18

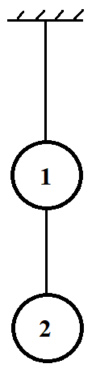
Решение. Пусть у шахматиста было n побед и m поражений. Тогда получаем $n + 0{,}5 \cdot (42 - n - m) = 30$. В итоге $n - m = 18$.

4. (*20 баллов*) Алюминиевая и медная детали имеют одинаковый объём. Плотность алюминия $\rho_A = 2700\,кг/м^3$, плотность меди $\rho_M = 8900\,кг/м^3$. Найдите массу меди, если известно, что массы деталей отличаются на $\Delta m = 60\,г$.

Ответ: $86\,г$

Решение. Объём алюминия: $V = \dfrac{m_M - \Delta m}{\rho_A}$, объём меди: $V = \dfrac{m_M}{\rho_M}$. Получаем: $\dfrac{m_M}{\rho_M} = \dfrac{m_M - \Delta m}{\rho_A}$. Отсюда масса алюминия: $m_A = \dfrac{\Delta m \cdot \rho_M}{\rho_M - \rho_A} = \dfrac{0{,}06 \cdot 8900}{8900 - 2700} \approx 0{,}086\,кг \approx 86\,г$.

5. (*15 баллов*) Найдите отношение m_1/m_2 двух висящих шариков, если известно, что силы натяжения верхней и нижней нитей отличаются в три раза.



Ответ: $\dfrac{m_1}{m_2} = 2$

Решение. Для нижнего шарика: $m_2 g = T_H$. Для верхнего шарика: $m_1 g + T_H = m_1 g + m_2 g = T_B$. При этом, $T_B = 3T_H$. Получаем, что $m_1 g + m_2 g = 3m_2 g$, то есть $\dfrac{m_1}{m_2} = 2$.

6. (*15 баллов*) От однородного прямого стержня отрезали кусок длиной $s = 80\,см$. На сколько в результате переместился центр тяжести стержня?

Ответ: $40\,см$

Решение. У исходного стержня центр тяжести располагался на расстоянии $\dfrac{l}{2}$ от его конца, где l – длина стержня. После того как отрезали кусок стержня, его центр окажется на расстоянии $\dfrac{l-s}{2}$ от другого конца. Следовательно, центр тяжести стержня переместился на $\dfrac{s}{2} = 40\,см$

Отборочный этап

9 класс **2018-2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Оля, пройдя пятую часть пути из дома в школу, поняла, что забыла тетрадку. Если она не будет за ней возвращаться, то придёт в школу за 6 мин до звонка, а если вернётся, то на две минуты опоздает. Сколько времени (в минутах) занимает путь в школу?

Ответ: 20 мин

Решение. Лишние 2/5 пути занимают 8 мин. Значит, весь путь в школу займёт 20 мин.

2. (*17 баллов*) Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{x+2}+2\sqrt{x-1}+3\sqrt{3x-2}=10.$$

Ответ: 2

Решение. Видно, что 2 – корень уравнения. Функция в левой части уравнения возрастающая (как сумма возрастающих функций). Поэтому других корней нет.

3. (*17 баллов*) В клетчатом квадрате 5×5 нужно поставить 6 крестиков так, чтобы в каждой строке и каждом столбце был хотя бы один крестик. Сколько способов это сделать?

Ответ: 4200

Решение. Из условия следует, что в какой-то строке a и в каком-то столбце b по два крестика (а в остальных строках и столбцах – по одному). И строка a, и столбец b выбираются 5 способами. Далее возможны два случая.
Первый. На пересечении a и b стоит крестик. Ещё по одному крестику из каждой линии выбираем 4 способами. Теперь остались незанятыми три строки и три столбца. На их пересечении оставшиеся крестики расставляются $3\cdot2\cdot1=6$ способами. Итак, расстановок первого типа $5\cdot5\cdot4\cdot4\cdot6=2400$.
Второй. На пересечении a и b нет крестика. Тогда по два крестика из каждой из этих двух линий выбираем $4\cdot3/2=6$ способами. Теперь остались незанятыми две строки и два столбца. На их пересечении оставшиеся крестики расставляются двумя способами. Итак, расстановок второго типа $5\cdot5\cdot6\cdot6\cdot2=1800$.
Всего получается 2400+1800=4200 вариантов расстановки 6 крестиков.

4. (*20 баллов*) Пуля массой $m = 10\,г$, летевшая горизонтально со скоростью $v_1 = 500\,м/с$, пробивает массивную доску и вылетает из неё со скоростью $v_2 = 200\,м/с$. Найдите величину работы, совершённой над пулей силой сопротивления доски.

Ответ: $1050\,Дж$

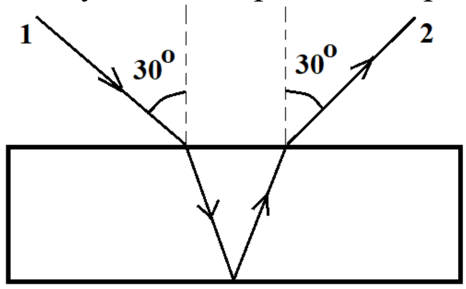
Решение. Из закона сохранения энергии следует, что

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{0{,}01 \cdot 500^2}{2} - \frac{0{,}01 \cdot 200^2}{2} = 1050\,Дж.$$

5. (*15 баллов*) Световой луч падает под углом $\alpha = 30°$ на переднюю поверхность плоскопараллельной стеклянной пластинки. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. На какой угол от направления падающего луча отклоняется луч, отражённый от задней поверхности пластинки и вышедший из неё обратно через переднюю поверхность?

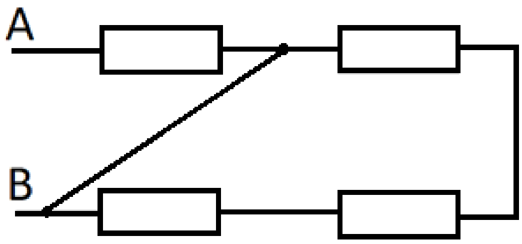
Ответ: $120°$

Решение. Описываемая ситуация изображена на рисунке.



Необходимо найти угол между лучами 1 и 2. Видно, что искомый угол равен $180° - 2\alpha = 120°$.

6. (*15 баллов*) Четыре резистора с одинаковыми сопротивлениями $R = 5\,Ом$ каждый соединены следующим образом.



Определите сопротивление всей схемы между точками *A* и *B*. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало.

Ответ: $5\,Ом$

Решение. Перемычка позволяет току протекать, минуя нижние и правое верхнее сопротивления. Следовательно, мы получаем: $R_{общ} = R = 5\,Ом$.

Отборочный этап

9 класс **2018-2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Коля, пройдя четвёртую часть пути из дома в школу, понял, что забыл задачник. Если он не будет за ним возвращаться, то придёт в школу за 5 мин до звонка, а если вернётся, то на одну минуту опоздает. Сколько времени (в минутах) занимает путь в школу?

Ответ: 12 мин

Решение. Лишние 2/4 пути занимают 6 мин. Значит, весь путь в школу займёт 12 мин.

2. (*17 баллов*) Найдите наибольший корень уравнения

$$3\sqrt{x-2}+2\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=11.$$

Ответ: 3

Решение. Видно, что 3 – корень уравнения. Функция в левой части уравнения возрастающая (как сумма возрастающих функций). Поэтому других корней нет.

3. (*17 баллов*) В клетчатом квадрате 4×4 нужно поставить 5 крестиков так, чтобы в каждой строке и каждом столбце был хотя бы один крестик. Сколько способов это сделать?

Ответ: 432

Решение. Из условия следует, что в какой-то строке a и в каком-то столбце b по два крестика (а в остальных строках и столбцах – по одному). И строка a, и столбец b выбираются 4 способами. Далее возможны два случая.

Первый. На пересечении a и b стоит крестик. Ещё по одному крестику из каждой линии выбираем 3 способами. Теперь остались незанятыми две строки и два столбца. На их пересечении оставшиеся крестики расставляются двумя способами. Итак, расстановок первого типа $4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2=288$.

Второй. На пересечении a и b нет крестика. Тогда по два крестика из каждой из этих двух линий выбираем тремя способами. Теперь остались незанятыми только одна строка и один столбец, на пересечении которых нужно поставить крестик. Итак, расстановок второго типа $4\cdot4\cdot3\cdot3=144$.

Всего получается 288+144=432 вариантов расстановки 5 крестиков.

4. (*20 баллов*) Пуля массой $m = 10\ г$, летевшая горизонтально со скоростью $v_1 = 400\ м/с$, пробивает массивную доску и вылетает из неё со скоростью $v_2 = 100\ м/с$. Найдите величину работы, совершённой над пулей силой сопротивления доски.

Ответ: $750\ Дж$

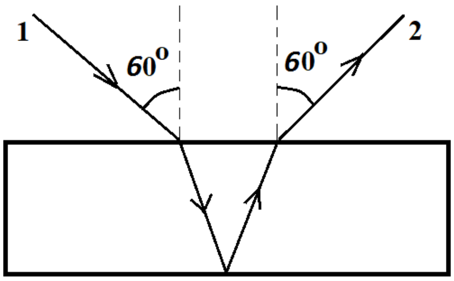
Решение. Из закона сохранения энергии следует, что

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{0{,}01 \cdot 400^2}{2} - \frac{0{,}01 \cdot 100^2}{2} = 750\ Дж.$$

5. (*15 баллов*) Световой луч падает под углом $\alpha = 60°$ на переднюю поверхность плоскопараллельной стеклянной пластинки. Показатель преломления стекла $n = 1{,}6$. На какой угол от направления падающего луча отклоняется луч, отражённый от задней поверхности пластинки и вышедший из неё обратно через переднюю поверхность?

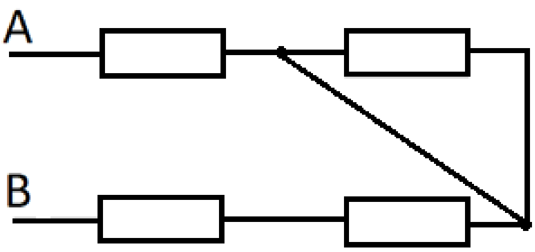
Ответ: $60°$

Решение. Описываемая ситуация изображена на рисунке.



Необходимо найти угол между лучами 1 и 2. Видно, что искомый угол равен $180° - 2\alpha = 60°$

6. (*15 баллов*) Четыре резистора с одинаковыми сопротивлениями $R = 5\ Ом$ каждый соединены следующим образом.



Определите сопротивление всей схемы между точками *A* и *B*. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало.

Ответ: $15\ Ом$

Решение. Перемычка позволяет току протекать, минуя правое верхнее сопротивление. Следовательно, мы получаем: $R_{общ} = 3R = 15\ Ом$.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Отборочный этап

10 класс **2018-2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие – 12% воды. Сколько кг сухих грибов получится из 22 кг свежих грибов?
Ответ: 2,5 кг
Решение. Сухого вещества в свежих грибах 2,2 кг, что составляет 88% в сухих грибах. Составив соответствующую пропорцию, найдём вес сухих грибов.

2. (*17 баллов*) Медианы, проведённые из вершин A и B треугольника ABC, перпендикулярны друг другу. Найдите площадь квадрата со стороной AB, если BC=28, AC=44.
Ответ: 544
Решение. Пусть D – середина BC, E – середина AC, M – точка пересечения медиан. Положим $MD=a$, $ME=b$. Тогда $AM=2a$, $BM=2b$. Из прямоугольных треугольников BMD и AME соответственно имеем $a^2+4b^2=BD^2=14^2$ и $4a^2+b^2=AE^2=22^2$. Сложив полученные равенства, после деления на 5 получим $a^2+b^2=136$. Отсюда $AB^2=AM^2+BM^2=4(a^2+b^2)=544$.

3. (*17 баллов*) В клетчатом прямоугольнике 4×5 нужно поставить 5 крестиков так, чтобы в каждой строке и каждом столбце был хотя бы один крестик. Сколько способов это сделать?
Ответ: 240
Решение. Из условия следует, что в какой-то строке помечено две клетки (а в остальных по одной). Эту строку можно выбрать 4 способами, а два крестика в ней $5\cdot4/2=10$ способами. Оставшиеся три крестика выбираются $3\cdot2\cdot1=6$ способами. По правилу произведения, всего получится $4\cdot10\cdot6=240$ вариантов.

4. (*20 баллов*) Мяч бросили с поверхности Земли под углом 45° со скоростью $v_0=20\ м/с$. За какое время вектор скорости мяча повернется на угол 90°? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10\ м/с^2$.
Ответ: $\approx 2{,}83\ с$.

Решение. Фактически, в задаче требуется найти всё время полета мяча. Координата y мяча меняется по закону:

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin 45° t - \frac{gt^2}{2} = 10\sqrt{2} \cdot t - 5t^2 = 0.$$

Отсюда получаем, что $t = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83\, c$.

5. (*15 баллов*) Массивная вертикальная плита закреплена на автомобиле, который движется со скоростью $4\, м/с$. Навстречу летит мяч со скоростью $5\, м/с$ относительно Земли. Определите скорость мяча относительно Земли после абсолютно упругого нормального удара.
Ответ: $13\, м/с$

Решение. Систему отсчёта свяжем с плитой. Относительно данной системы отсчёта мяч летит со скоростью $5\, м/с + 4\, м/с = 9\, м/с$. После абсолютно упругого удара, скорость мяча относительно плиты также $9\, м/с$. Следовательно, относительно Земли скорость мяча $9\, м/с + 4\, м/с = 13\, м/с$.

6. (*15 баллов*) Два одинаковых резистора R_0 соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения. Параллельно одному из резисторов подключен идеальный вольтметр. Его показания $U = 9\, В$. Если вольтметр заменить идеальным амперметром, то его показания окажутся равными $I = 2\, A$. Определите значение R_0.
Ответ: $9\, Ом$

Решение. Напряжение, выдаваемое источником, равно $U_{общ} = 2U = 18\, В$. Во втором случае ток течёт только через один из резисторов. Следовательно, $R_0 = \frac{U_{общ}}{I} = 9\, Ом$.

Отборочный этап

10 класс **2018-2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Свежие грибы содержат по массе 80% воды, а сухие – 20% воды. Сколько кг сухих грибов получится из 20 кг свежих грибов?

Ответ: 5 кг

Решение. Сухого вещества в свежих грибах 4 кг, что составляет 80% в сухих грибах. Составив соответствующую пропорцию, найдём вес сухих грибов.

2. (*17 баллов*) Медианы, проведённые из вершин *A* и *B* треугольника *ABC*, перпендикулярны друг другу. Найдите площадь квадрата со стороной *AB*, если *BC*=36, *AC*=48.

Ответ: 720

Решение. Пусть *D* – середина *BC*, *E* – середина *AC*, *M* – точка пересечения медиан. Положим *MD*=*a*, *ME*=*b*. Тогда *AM*=2*a*, *BM*=2*b*. Из прямоугольных треугольников *BMD* и *AME* соответственно имеем $a^2+4b^2=BD^2=18^2$ и $4a^2+b^2=AE^2=24^2$. Сложив полученные равенства, после деления на 5 получим $a^2+b^2=180$. Отсюда $AB^2=AM^2+BM^2=4(a^2+b^2)=720$.

3. (*17 баллов*) В клетчатом прямоугольнике 3×4 нужно поставить 4 крестика так, чтобы в каждой строке и каждом столбце был хотя бы один крестик. Сколько способов это сделать?

Ответ: 36

Решение. Из условия следует, что в какой-то строке помечено две клетки (а в остальных по одной). Эту строку можно выбрать 3 способами, а два крестика в ней $4\cdot3/2=6$ способами. Оставшиеся два крестика выбираются двумя способами. По правилу произведения, всего получится $3\cdot6\cdot2=36$ вариантов.

4. (*20 баллов*) Мяч бросили с поверхности Земли под углом $30°$ со скоростью $v_0=20\ м/с$. За какое время вектор скорости мяча повернётся на угол $60°$? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10\ м/с^2$.

Ответ: $t=2\ c$

Решение. Фактически, в задаче требуется найти всё время полета мяча. Координата y мяча меняется по закону: $y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin 30° t - \frac{gt^2}{2} = 10 \cdot t - 5t^2 = 0$

Отсюда получаем, что: $t = 2\,с$.

5. (*15 баллов*) Массивная вертикальная плита закреплена на автомобиле, который движется со скоростью $5\,м/с$. Навстречу летит мяч со скоростью $6\,м/с$ относительно Земли. Определите скорость мяча относительно Земли после абсолютно упругого нормального удара.

Ответ: $16\,м/с$

Решение. Систему отсчёта свяжем с плитой. Относительно данной системы отсчёта мяч летит со скоростью $5\,м/с + 6\,м/с = 11\,м/с$. После абсолютно упругого удара, скорость мяча относительно плиты также $11\,м/с$. Следовательно, относительно Земли скорость мяча $11\,м/с + 5\,м/с = 16\,м/с$

6. (*15 баллов*) Два одинаковых резистора R_0 соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения. Параллельно одному из резисторов подключен идеальный вольтметр. Его показания $U = 2\,В$. Если вольтметр заменить идеальным амперметром, то его показания окажутся равными $I = 4\,А$. Определите значение R_0.

Ответ: $1\,Ом$

Решение. Напряжение, выдаваемое источником, равно $U_{общ} = 2U = 4\,В$. Во втором случае ток течёт только через один из резисторов. Следовательно, $R_0 = \frac{U_{общ}}{I} = 1\,Ом$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Отборочный этап

11 класс **2018-2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Имеются две окружности: с центром в точке A и радиусом 6 и с центром в точке B и радиусом 3. Их общая внутренняя касательная касается окружностей соответственно в точках C и D. Прямые AB и CD пересекаются в точке E. Найдите CD, если AE=10.

Ответ: 12

Решение. Треугольники ACE и BDE подобны (у них есть вертикальные углы и по прямому углу) с коэффициентом подобия 2. Из треугольника ACE, по теореме Пифагора, находим CE=8. Отсюда, DE=4, а CD=12.

2. (*17 баллов*) Найдите наибольший корень уравнения

$$\left|\cos(\pi x)+x^3-3x^2+3x\right|=3-x^2-2x^3.$$

Ответ: 1

Решение. Очевидно, что 1 – корень уравнения (при x=1 обе части уравнения равны нулю). Если же x>1, правая часть уравнения отрицательна, в то время как левая часть уравнения всегда неотрицательна.

3. (*17 баллов*) Найдите наименьшее натуральное число, которое одновременно является удвоенным точным квадратом и утроенным точным кубом.

Ответ: 648

Решение. Имеем $k=3n^3=2m^2$. Отсюда числа m и n можно представить в виде $n=2a$, $m=3b$. После подстановки получим $4a^3=3b^2$. Далее имеем $a=3c$, $b=2d$, $9c^3=d^2$. Здесь наименьшее решение c=1, d=3. Тогда a=3, b=6, n=6, m=18, k=648.

4. (*15 баллов*) КПД идеальной тепловой машины равен 40%. Каким он станет, если температуру нагревателя увеличить на 40%, а температуру холодильника уменьшить на 40%?

Ответ: $\approx 74\%$.

Решение. КПД идеальной тепловой машины: $\eta = 1 - \frac{T_X}{T_H}$. То есть в начале отношение температур холодильника и нагревателя: $\frac{T_X}{T_H} = 1 - 0,4 = 0,6$. После изменений:

$$\eta_2 = 1 - \frac{0,6T_X}{1,4T_H} = 1 - \frac{0,6 \cdot 0,6}{1,4} \approx 0,74 \approx 74\,\%.$$

5. (*20 баллов*) Точечный источник света располагается на одинаковом расстоянии $x = 10\,см$ от линзы и её главной оптической оси. Его прямое изображение расположено на расстоянии $y = 5\,см$ от главной оптической оси. Определите оптическую силу линзы и расстояние между источником света и его изображением.

Ответ: $-10\,Дптр$ *и* $\approx 7,1\,см$

Решение. Изображение прямое, следовательно, оно мнимое. Увеличение: $Г = \frac{y}{x} = \frac{f}{d}$. Получаем, что расстояние от линзы до изображения: $f = d \cdot \frac{y}{x} = 10 \cdot \frac{5}{10} = 5\,см$. Оптическая сила линзы: $D = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{0,1} - \frac{1}{0,05} = -10\,Дптр$. Расстояние между источником и его изображением: $s = \sqrt{(x-y)^2 + (d-f)^2} = \sqrt{50} \approx 7,1\,см$.

6. (*15 баллов*) Бак массой $m_1 = 2\,кг$ покоится на тележке массой $m_2 = 10\,кг$, которую разгоняют с ускорением $a = 5\,м/с^2$. Коэффициент трения между баком и тележкой $\mu = 0,6$. Определите силу трения, действующую на бак со стороны тележки.

Ответ: $10\,Н$

Решение. При данных условиях речь идет о силе трения покоя. По второму закону Ньютона: $F_{тр} = m_1 a = 10\,Н$.

Отборочный этап

11 класс **2018-2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Имеются две окружности: с центром в точке A и радиусом 5 и с центром в точке B и радиусом 15. Их общая внутренняя касательная касается окружностей соответственно в точках C и D. Прямые AB и CD пересекаются в точке E. Найдите CD, если $BE=39$.

Ответ: 48

Решение. Треугольники ACE и BDE подобны (у них есть вертикальные углы и по прямому углу) с коэффициентом подобия 1/3. Поэтому $AE=13$. Из треугольника ACE, по теореме Пифагора, находим $CE=12$. Отсюда, $DE=36$, а $CD=48$.

2. (*17 баллов*) Найдите наименьший корень уравнения

$$|\sin(\pi x)+tg x|=x+x^3.$$

Ответ: 0

Решение. Очевидно, что 0 – корень уравнения (при $x=0$ обе части уравнения равны нулю). Если же $x<0$, правая часть уравнения отрицательна, в то время как левая часть уравнения всегда неотрицательна.

3. (*17 баллов*) Найдите наименьшее натуральное число, которое одновременно является удвоенным точным кубом и утроенным точным квадратом.

Ответ: 432

Решение. Имеем $k=2n^3=3m^2$. Отсюда числа m и n можно представить в виде $n=3a$, $m=2b$. После подстановки получим $9a^3=2b^2$. Далее имеем $a=2c$, $b=3d$, $4c^3=d^2$. Здесь наименьшее решение $c=1$, $d=2$. Тогда $a=2$, $b=6$, $n=6$, $m=12$, $k=432$.

4. (*15 баллов*) КПД идеальной тепловой машины равен 50%. Каким он станет, если температуру нагревателя увеличить на 50%, а температуру холодильника уменьшить на 50%?

Ответ: $\approx 83\%$

Решение. КПД идеальной тепловой машины: $\eta = 1 - \frac{T_X}{T_H}$. То есть в начале отношение температур холодильника и нагревателя: $\frac{T_X}{T_H} = 1 - 0,5 = 0,5$. После изменений:

$$\eta_2 = 1 - \frac{0,5T_X}{1,5T_H} = 1 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{1,5} \approx 0,83 = 83\%.$$

5. (*20 баллов*) Точечный источник света располагается на одинаковом расстоянии $x = 10\,см$ от линзы и её главной оптической оси. Его прямое изображение расположено на расстоянии $y = 20\,см$ от главной оптической оси. Определите оптическую силу линзы и расстояние между источником света и его изображением.

Ответ: $5\,Дптр$ *и* $\approx 14,1\,см$

Решение. Изображение прямое, следовательно, оно мнимое. Увеличение: $Г = \frac{y}{x} = \frac{f}{d}$. Получаем, что расстояние от линзы до изображения: $f = d \cdot \frac{y}{x} = 10 \cdot \frac{20}{10} = 20\,см$. Оптическая сила линзы: $D = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{0,1} - \frac{1}{0,2} = 5\,Дптр$. Расстояние между источником и его изображением: $s = \sqrt{(x-y)^2 + (d-f)^2} = \sqrt{200} \approx 14,1\,см$.

6. (*15 баллов*) Бак массой $m_1 = 3\,кг$ покоится на тележке массой $m_2 = 15\,кг$, которую разгоняют с ускорением $a = 4\,м/с^2$. Коэффициент трения между баком и тележкой $\mu = 0,6$. Определите силу трения, действующую на бак со стороны тележки.

Ответ: $12\,Н$

Решение. При данных условиях речь идет о силе трения покоя. По второму закону Ньютона: $F_{тр} = m_1 a = 12\,Н$.